► 6. Problemas dirigidos

► 6.5 Viviani

DISEÑO DE LA ACTIVIDAD

Objetivos

Se pretende ejemplificar el uso de GeoGebra como ayuda en la exploración, descubrimiento o comprobación de invariantes geométricos. Hemos elegido uno de los más sencillos, conocido como teorema de Viviani.

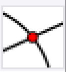
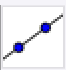
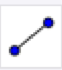
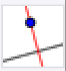
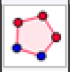
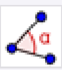
Según el teorema de Viviani, "en todo triángulo equilátero la suma de las tres distancias de un punto interior a los lados es constante". Dado que desde un vértice esa suma es, evidentemente, la longitud de la altura del triángulo, ésta será la constante.

Si asignamos un signo a cada distancia, según se encuentre el punto en uno u otro semiplano a cada lado del lado (valga la redundancia), el teorema es válido para todos los puntos del plano, ya sean interiores, exteriores o pertenezcan a los lados.

USO DE GEOGEBRA

Herramientas

Usaremos el comando Texto para crear un texto dinámico, y los comandos Si y Elemento para tratar la información. También veremos un ejemplo de cómo operar con listas. Además usaremos las siguientes herramientas.

	Punto		Intersección		Recta
	Segmento		Perpendicular		Polígono-regular
	Ángulo				

Construcción paso a paso

 Antes de empezar, puede ser buena idea echar un vistazo al "Ejemplo de construcción" que se encuentra en esta página. Incluso podemos ayudarnos de la **Barra de Navegación** para realizar un rápido recorrido por los pasos.

Preparamos el escenario.

Preparación

- No
- No
- Desactiva

Construimos la figura.

Etapa 1

- Con la herramienta **Polígono-regular** creamos un triángulo equilátero. Se crearán los puntos A, B, C y tres segmentos.
- Con la herramienta **Punto** creamos el punto D.
- Con la herramienta **Recta** creamos las rectas AB, BC y CA.
- Con la herramienta **Perpendicular** trazamos las perpendiculares desde D a las rectas anteriores.
- Con la herramienta **Intersección** creamos las proyecciones de D en las rectas.
- Con la herramienta **Segmento** creamos los segmentos (a, b y c) entre D y sus proyecciones.

  Alternativamente, habríamos podido ahorrarnos las rectas AB, BC y CA, trazando directamente las perpendiculares a los lados, pero en este caso deberemos activar en las propiedades de éstos la opción de admitir intersecciones en las prolongaciones. De este modo evitaremos que algún segmento (a, b o c) pueda quedar indefinido al caer su proyección fuera del lado cuando el punto D se sitúe en el exterior del hexágono regular circunscrito al triángulo.
- Con la herramienta **Ángulo** creamos los ángulos ADB, BDC y CDA con los que el punto D abarca los lados del triángulo y los nombramos, respectivamente, angAB, angBC y angCA.

Si usamos la construcción para comprobar o demostrar el teorema (no para descubrirlo), añadimos un texto dinámico que muestre el resultado.

Etapa 2

- Entrada:

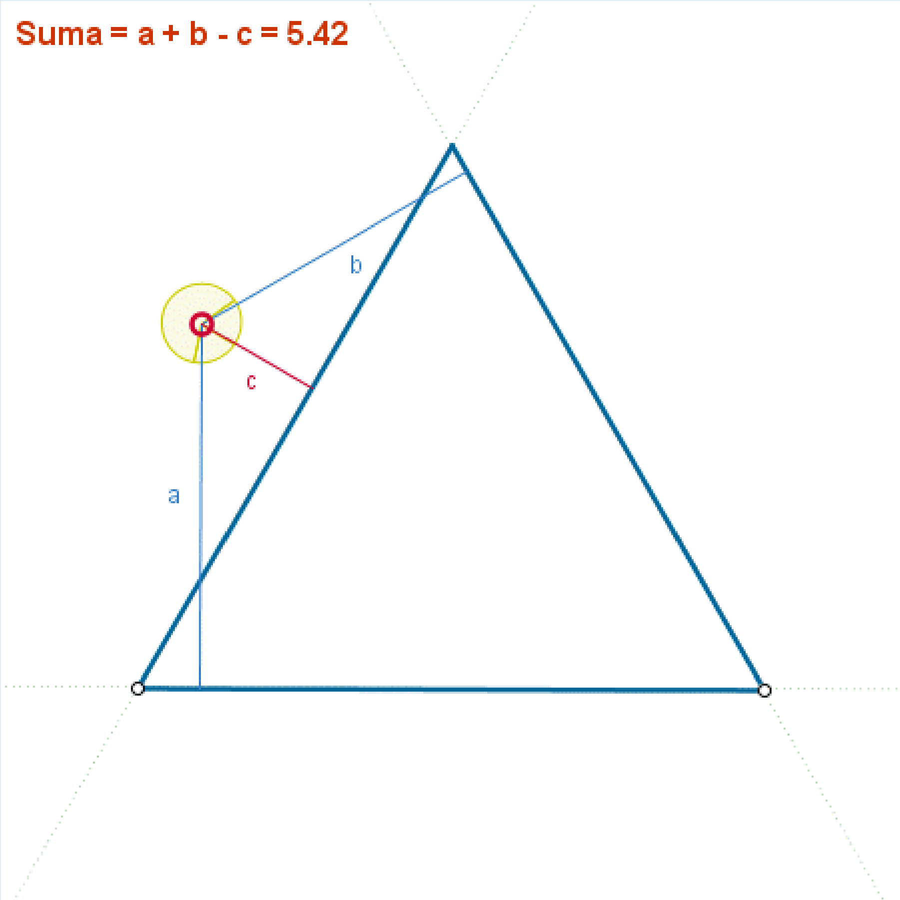
```
test = sgn(180 ° - {angAB, angBC, angCA})

suma = a Elemento[test, 1] + b Elemento[test, 2] + c
Elemento[test, 3]

sa = Si[Elemento[test, 1] < 0, " - ", ""]

sb = Si[Elemento[test, 2] < 0, " - ", " + "]

sc = Si[Elemento[test, 3] < 0, " - ", " + "]

Texto["Suma = " + sa + "a" + sb+ "b" + sc + "c = " +
suma]
```

Observemos que "test" es una lista, creada al restar la lista de ángulos de una constante (180º) y tomar el signo de esa diferencia.

Para más detalles sobre el uso del texto dinámico, ver el apartado Texto de la sección Herramientas de la ayuda.

Ejemplo de construcción

Viviani



Clic en esta imagen abre la construcción de GeoGebra

Propuesta de construcción

Realizar una construcción similar sobre un pentágono regular.

Comentarios

Dependiendo del nivel de conocimientos y experiencia de nuestros alumnos podemos usar esta construcción u otras similares para:

a) Comprobar que se cumple el teorema.

b) Invitar a que descubran el teorema, sugiriendo que deben buscar una medida invariante.

c) Invitar a que descubran el teorema, construyendo ellos mismos la figura.

d) Invitar a que demuestren el teorema, añadiendo si es preciso algunos elementos auxiliares a la construcción.

Investigación:

- ¿Por qué se produce esta constancia de la suma de las distancias? ¿Es difícil demostrar el teorema de Viviani?
- En el apartado "Otros modelos" podemos encontrar la generalización del teorema de Viviani a cualquier polígono equiangular (no necesariamente regular). ¿Se puede generalizar la demostración anterior a este caso general?